УДК 519.5:681:513

ПАВЛОВ А.А.,
КУТ В.И.,
ШТАНЬКЕВИЧ А.С.

НАХОЖДЕНИЕ ВЕСОВ ПО МАТРИЦЕ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ С ОДНОСТОРОННИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Предлагаются и обосновываются модели оптимизации для нахождения весов объектов в методе анализа иерархий по матрице парных сравнений с односторонними ограничениями.

The optimization models for objects' priorities searching in the Analytic Hierarchy Process (AHP) using pair-wise comparision matrix with "one-side" boundaries are proposed and substantiated.

Ключевой проблемой при решении задачи многокритериального выбора с помощью метода анализа иерархий является нахождение весов $w_1,\dots w_n$ объектов $A_1,\dots A_n$ (альтернатив, критериев) по отношению к некоторому свойству, цели (критерию). Веса определяются по эмпирической матрице парных сравнений $(\gamma_{ij})_1^n$ задаваемой экспертом (экспертами). Число γ_{ij} задается экспертом и показывает, по мнению эксперта, во сколько раз вес объекта A_i больше веса объекта A_j по отношению к заданной цели (критерию).

В [2, 3] были рассмотрены более общие случаи матрицы парных сравнений, предложены и обоснованы методы нахождения по ним весов объектов. В данной статье исследуется случай, когда произвольный элемент матрицы парных сравнений имеет вид:

$$\frac{w_i}{w_j} \ge \gamma_{ij} \text{ или } \frac{w_i}{w_j} \le \gamma_{ij}, \tag{1}$$

где $w_i, i=\overline{1,n}$ неизвестные веса объектов.

Такая постановка задачи порождается стандартной, когда матрицы парных сравнений задают интервальные оценки

$$\underline{\gamma_{ij}} \le \frac{w_i}{w_j} \le \overline{\gamma_{ij}} \tag{2}$$

Действительно, если у эксперта (экспертов) существует дополнительная информация о том, что при фиксированных i, j $\frac{w_i}{w_j}$ скорее всего принимает значение ближе к $\underline{\gamma_{ij}}$ либо к $\overline{\gamma_{ij}}$, то эмпирическую матрицу парных сравнений (2) можно заменить эмпирической матрицей парных сравнений (1).

Исходя из логики обоснования односторонних ограничений можно сформулировать следующие функционалы качества, оптимальному значению которых должны соответствовать значения весов объектов: искомые веса объектов w_i должны быть такими, чтобы односторонняя мера (интегральная мера) отклонения $\frac{w_i}{w_j}$ от γ_{ij} была минимальной.

В [1] показано, что в качестве меры отклонения $\frac{w_i}{w_j}$ от эмпирического γ_{ij} логично выбрать

$$\frac{1}{\gamma_{ij}}\left|\frac{w_i}{w_j} - \gamma_{ij}\right| \tag{3}$$

В [1, 2,] показано, что непосредственное использование этой меры может приводить к задачам нелинейного невыпуклого программирования и в связи с этим вводились меры формально отличные от (3), приводящие к задачам линейного либо выпуклого программирования. В данной статье будут рассматриваться модели оптимизации, основанные только на мере (3), построение которых логично вытекает из моделей (6)–(7), (8)–(9) [3].

Рассмотрим два частных случая.

1) $\frac{w_i}{w_j} \ge \gamma_{ij}$ для $\forall (ij) \in |A|$,

где А множество всех элементов матрицы парных сравнений удовлетворяющих условиям: $i \ne j, \gamma_{ij} \ge 1$,
$i, j = \overline{1,n}$;
$|A|$ – соответствующее A множество пар индексов (ij)

Для нахождения весов объектов по матрице парных сравнений построим следующие модели оптимизации:

Модель 1.

$$\min_{\substack{y_{ij}\\ \forall(i,j)\in|A|}} \sum_{(ij)}\sum_{\in|A|} \ell n(1+y_{ij}) \tag{4}$$

$$1\le w_i\le b,\quad i=\overline{1,n}$$

$$\frac{w_i}{w_j}=\gamma_{ij}\left(1+y_{ij}\right) \tag{5}$$

$$0\le y_{ij}\le b-1,\quad \forall\left(i,j\right)\in|A|$$

Переменными задачи являются $\forall(ij)\in|A|\ \ y_{ij},\ w_i,\ \ i=\overline{1,n}.$

Модель (4)–(5) является аппроксимационной для оптимизационной задачи:

$$\min_{\substack{y_{ij}\\ \forall(i,j)\in|A|}} \sum_{(ij)}\sum_{\in|A|} y_{ij} \tag{6}$$

$$\frac{w_i}{w_j}=\gamma_{ij}\left(1+y_{ij}\right) \tag{7}$$

$$\forall\left(i,j\right)\in|A|\quad y_{ij}\ge 0.$$

$$1\le w_{ij}\le b,\quad i=\overline{1,n}$$

Переменные задач (4)–(5) и (6)–(7) совпадают.

Модель (6)–(7) является задачей нелинейного невыпуклого программирования, а модель 1 эквивалентна следующей задаче линейного программирования:

Модель 2.

$$\min \sum_{(ij)}\sum_{\in|A|}\Delta^1_{ij} \tag{8}$$

$$W_i-W_j=\ell n\gamma_{ij}+\Delta^1_{ij}\quad \forall_{ij}\in|A|$$
$$0\le\Delta^1_{ij}\le\ell nb\quad \forall_{ij}\in|A| \tag{9}$$
$$0\le W_i\le\ell nb\quad i=\overline{1,n}$$

Переменные задачи $W_i,\quad i=\overline{1,n},\quad \Delta^1_{ij},\quad \forall\left(ij\right)\in|A|$

Оптимальные решения задач (4)–(5) и (8)–(9) совпадают.

Переменные w_i задачи (4)–(5) и W_i задачи (8)–(9) связаны соотношением $w_i=e^{W_i},\quad i=\overline{1,n}$.

Рассмотрим следующую задачу оптимизации:

Модель 3.

$$\min_y \ell n\left(1+y\right) \tag{10}$$

$$\gamma_{ij}\le\frac{w_i}{w_j}\le\gamma_{ij}\left(1+y\right) \tag{11}$$
$$\forall\left(ij\right)\in|A|,\quad y\ge 0$$
$$1\le w_i\le b,\quad i=\overline{1,n}$$

Модель 3 эквивалентна следующей задаче линейного программирования:

Модель 4.

$$\min_\Delta \Delta \tag{12}$$

$$\ell n\,\gamma_{ij}\le W_i-W_j\le\ell n\,\gamma_{ij}+\Delta\quad \forall\left(ij\right)\in|A| \tag{13}$$

$$0\le\Delta\le\ell n\,b,$$

$$0\le W_i\le\ell n\,b,\quad i=\overline{1,n}$$

Переменным задачи является $\Delta,\ W_i,\ \ i=\overline{1,n}$.

Переменные задач (10)–(11) и (12)–(13) связаны соотношениями:

$w_i=e^{W_i},\quad i=\overline{1,n},\quad y=e^{\Delta}-1.$

В отличие от задачи (4)–(5), оптимальному решению задачи (10)–(11) соответствуют такие веса объектов, у которых достигается минимум выражения:

$$\max_{(ij)\in|A|}\frac{\left|\dfrac{w_i}{w_j}-\gamma_{ij}\right|}{\gamma_{ij}}$$

Тогда вместо решения задачи линейного программирования (8)–(9) веса объектов можно находить как оптимальное решение следующей задачи линейного программирования:

Модель 5.

$$\min\sum_{(ij)}\sum_{\in|A|}\Delta^1_{ij} \tag{14}$$

$$W_i-W_j=\ell n\,\gamma_{ij}+\Delta^1_{ij}$$
$$0\le\Delta^1_{ij}\le\Delta^* \tag{15}$$

$$0\le W_i\le\ell n\,b,\quad i=\overline{1,n},$$

Δ^* – оптимальное решение задачи (12)–(13)

2) $\dfrac{w_i}{w_j}\le\gamma_{ij}\quad\forall\left(ij\right)\in|A|$

Веса находятся, как оптимальное решение следующей оптимизационной задачи:

Модель 6.

$$\min_{\substack{z_{ij}\\ \forall(ij)\in|A|}}\sum_{(ij)}\sum_{\in|A|}\ell n\frac{1}{1-z_{ij}} \tag{16}$$

$$1\le w_i\le b,\quad i=\overline{1,n}$$

$$\frac{w_i}{w_j}=\gamma_{ij}\left(1-z_{ij}\right),\quad 0\le z_{ij}\le 1-\frac{1}{b^2} \tag{17}$$

$$\forall\left(ij\right)\in|A|$$

Переменные задачи $z_{ij},\ \ ij\in|A|,\ \ w_i,\ \ i=\overline{1,n}$.

Модель 6 эквивалентна следующей задаче линейного программирования:

Модель 7.

$$\max_{\substack{\Delta^2_{ij}\\ (ij)\in|A|}}\sum_{(ij)}\sum_{\in|A|}\Delta^2_{ij} \tag{18}$$

$$W_i - W_j = \ell n\, \gamma_{ij} + \Delta_{ij}^2 \quad (ij) \in |A| \tag{19}$$

$$\ell n\left(\frac{1}{b^2}\right) \le \Delta_{ij}^2 \le 0 \quad 0 \le W_i \le \ell n\, b.$$

$$(ij) \in |A| \qquad i = \overline{1,n}.$$

Переменными задачи являются $\Delta_{ij}^2,\ (ij) \in |A|$ $W_i,\quad i = \overline{1,n}.$

Связь между переменными задач (14)–(15) и (16)–(17) является следующей:

$w_i = e^{W_i},\quad i = \overline{1,n}.$

Модель 7 является аппроксимационной для следующей нелинейной оптимизационной задачи:

$$\min \sum_{(ij)\ \in |A|} \sum z_{ij}$$

$$1 \le w_i \le b,\quad i = \overline{1,n}$$

$$\frac{w_i}{w_j} = \gamma_{ij}\left(1 - z_{ij}\right),\quad 0 \le z_{ij} \le 1 - \frac{1}{b^2}$$

Переменными являются $z_{ij},\ (ij) \in |A|,\ w_i,\ \ i = \overline{1,n}$

Для случая $\frac{w_i}{w_j} \le \gamma_{ij},\ (ij) \in |A|$ аналогом модели (10) – (11) является следующая:

Модель 8.

$$\min_z\ \ell n \frac{1}{1-z} \tag{20}$$

$$1 \le w_i \le b,\quad i = \overline{1,n}$$

$$\gamma_{ij}(1-z) \le \frac{w_i}{w_j} \le \gamma_{ij} \quad \forall (ij) \in |A| \tag{21}$$

$$0 \le z \le 1 - \frac{1}{b^2}$$

Переменными являются $z,\ w_i,\quad i = \overline{1,n}.$

Задача (20) – (21) эквивалентна следующей задаче линейного программирования:

Модель 9.

$$\max \Delta \tag{22}$$

$$\ell n\, \gamma_{ij} + \Delta \le W_i - W_j \le \ell n\, \gamma_{ij},\ \forall (ij) \in |A| \tag{23}$$

$$\ell n \frac{1}{b^2} \le \Delta \le 0,\ \ 0 \le W_i \le \ell n\, b \quad i = \overline{1,n}$$

Аналогом задачи оптимизации (14)–(15) для данного случая является следующая задача линейного программирования:

Модель 10.

$$\max_{\Delta_{ij}^2} \sum_{(ij)\ \in |A|} \sum \Delta_{ij}^2 \tag{24}$$

$$W_i - W_j = \ell n\, \gamma_{ij} + \Delta_{ij}^2,\ (ij) \in |A| \tag{25}$$

$$\Delta^* \le \Delta_{ij}^2 \le 0,\quad 0 \le W_i \le \ell n\, b,\quad i = \overline{1,n},$$

где Δ^* – оптимальное решение задачи (22) – (23).

3) Общий случай.

Множество $|A|$ разбивается на два непересекающихся подмножества $|A| = |A_1| \cup |A_2|$ по следующему правилу:

$\forall (ij) \in |A_1|$ выполняется $\frac{w_i}{w_j} \ge \gamma_{ij}$;

$\forall (ij) \in |A_2|$ выполняется $\frac{w_i}{w_j} \le \gamma_{ij}$.

В этом случае в качестве модели оптимизации используем модификацию модели (6)–(7) [3]:

Модель 11.

$$\min_{\substack{y_{ij} \quad z_{ij} \\ (ij)\in|A_1|,\forall(ij)\in|A_2|}} \left(\sum_{(ij)\ \in |A_1|} \sum \ell n\left(1 + y_{ij}\right) + C_{\ell m} \sum_{(ij)\ \in |A_2|} \sum \ell n \frac{1}{1 - z_{ij}} \right) \tag{26}$$

$$1 \le w_i \le b,\quad i = \overline{1,n}$$

$$\frac{w_i}{w_j} = \gamma_{ij}\left(1 + y_{ij}\right) \quad \forall (ij) \in |A_1| \tag{27}$$

$$0 \le y_{ij} \le \ell\ \Delta_1(\ell) \le b - 1;$$

$$\frac{w_i}{w_j} = \gamma_{ij}\left(1 - z_{ij}\right) \quad \forall (ij) \in |A_2|$$

$$0 \le z_{ij} \le m\ \Delta_2(m) \le 1 - \frac{1}{b^2}$$

$\ell,\ m$ – последовательно возрастающие числа, $\Delta_1(\ell) > 0,\ \Delta_2(m) > 0$ – заданы.

Коэффициенты $C_{\ell m}$ находятся из равенства:

$$\ell n\left(1 + \ell\ \Delta_1(\ell)\right) = C_{\ell m}\ \ell n \frac{1}{1 - m\ \Delta_2(m)}.$$

Последовательность задач оптимизации (26) – (27) эквивалентна следующей последовательности задач линейного программирования:

Модель 12.

$$\min_{\substack{\Delta_{ij}^1\ ,\ \Delta_{ij}^2 \\ \forall(ij)\in|A_1|\ \forall(ij)\in|A_2|}} \left(\sum_{(ij)\ \in |A_1|} \sum \Delta_{ij}^1 - C_{\ell m} \sum_{(ij)\in|A_2|} \Delta_{ij}^2 \right) \tag{28}$$

$$
\begin{gathered}
W_i - W_j = \ell n\, \gamma_{ij} + \Delta_{ij}^1,\ \forall (ij) \in |A_1| \\
W_i - W_j = \ell n\, \gamma_{ij} + \Delta_{ij}^2,\ \forall (ij) \in |A_2| \\
0 \le \Delta_{ij}^1 \le \ell n\left(1 + \ell\ \Delta_1(\ell)\right);\quad \forall (ij) \in |A_1| \\
\ell n\left(1 - m\ \Delta_2(m)\right) \le \Delta_{ij} \le 0,\quad \forall (ij) \in |A_2| \\
0 \le W_i \le \ell n\, b,\quad i = \overline{1,n} \\
0 \le \ell\ \Delta_1(\ell) \le b - 1;\quad 0 \le m\ \Delta_2(m) \le 1 - \frac{1}{b^2}
\end{gathered}
\qquad (29)
$$

ℓ, m – последовательно возрастающие натуральные числа.

Связь между переменными w_i и W_i очевидна $w_i = e^{W_i}, \quad i = \overline{1,n}.$

Заключение

Предложены и обоснованы модели оптимизации для нахождения весов объектов по матрицам парных сравнений, элементы которой являются односторонними неравенствами.

Список литературы

1. А.А. Павлов, Е.И. Лищук, В.И. Кут. Математические модели оптимизации для обоснования и нахождения весов в методе парных сравнений. Системні дослідження та інформаційні технології. №2, 2007р.
2. А.А. Павлов, В.И. Кут. Математические модели оптимизации для обоснования и нахождения весов объектов по неоднородным матрицам парных сравнений. Системні дослідження та інформаційні технології. №3, 2007р.
3. А.А. Павлов, Е.И. Лищук, В.И. Кут. Многокритериальный выбор в задаче обработки данных матрицы парных сравнений. Вісник НТУУ „КПІ”. Інформатика, управління та обчислювальна техніка. №46, 2008р.